ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 24, № 126 2019

DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-126-204-210

УДК 512.7

Перечисление проективно конгруэнтных симметричных матриц

Ольга Александровна СТАРИКОВА

ФГБОУ ВО «Северо-Восточный государственный университет»

685000, Российская Федерация, г. Магадан, ул. Портовая, 13

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0507-5493, e-mail: star-olga@yandex.ru

Projective congruent symmetric matrices enumeration

Olga A. STARIKOVA

North-Eastern State University

13 Portovaja St., Magadan 685000, Russian Federation

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0507-5493, e-mail: star-olga@yandex.ru

Аннотация. Исследуются проективные пространства над локальным кольцом $R = 2R$ с главным максимальным идеалом J, $1 + J \subseteq R^{*2}$. Квадратичные формы и соответствующие им симметричные матрицы A и B проективно конгруэнтны, если существуют $k \in R^*$ и $U \in GL(n,R)$ такие, что $kA = UBU^T$. В случае $k = 1$ квадратичные формы (соответственно, симметричные матрицы) называем конгруэнтными. Решение задачи перечисления конгруэнтных и проективно конгруэнтных классов квадратичных форм основано на выявлении (единственного) нормального вида соответствующих им симметричных матриц и тесно связана с теорией схем квадратичных форм. Над локальным кольцом R, удовлетворяющим условиям $R^*/R^{*2} = \{1, -1, p, -p\}$ и $D(1,1) = D(1,p) = \{1,p\}$, $D(1,-1) = D(1,-p) = \{1,-1,p,-p\}$, выявлен (единственный) нормальный вид конгруэнтных симметричных матриц. Для случая, когда максимальный идеал является нильпотентным, найдено число классов конгруэнтных и проективно конгруэнтных симметричных матриц.

Ключевые слова: проективное пространство; локальное кольцо; проективная конгруэнтность; проективная эквивалентность

Для цитирования: *Старикова О.А.* Перечисление проективно конгруэнтных симметричных матриц // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2019. Т. 24. № 126. С. 204–210. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-126-204-210.

Abstract. Projective spaces over local ring $R = 2R$ with principal maximal ideal J, $1+J \subseteq R^{*2}$ have been investigated. Quadratic forms and corresponding symmetric matrices A and B are projectively congruent if $kA = UBU^T$ for a matrix $U \in GL(n,R)$ and for some $k \in R^*$. In the case of $k = 1$ quadratic forms (corresponding symmetric matrices) are called congruent. The problem of enumerating congruent and projective congruent quadratic forms is based on the identification of the (unique) normal form of the corresponding symmetric matrices and is related to the theory of quadratic form schemes. Over the local ring R on conditions $R^*/R^{*2} = \{1, -1, p, -p\}$ and $D(1,1) = D(1,p) = \{1,p\}$,

$D(1,-1)=D(1,-p)=\{1,-1,p,-p\}$ (unique) normal form of congruent symmetric matrices over ring R is detected. Quantities of congruent and projective congruent symmetric matrix classes is found when maximal ideal is nilpotent.

Keywords: projective spaces; local rings; projective congruence; projective equivalence

For citation: Starikova O.A. Perechislenie proektivno kongruentnyh simmetrichnyh matric [Projective congruent symmetric matrices enumeration]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2019, vol. 24, no. 126, pp. 204–210. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-126-204-210. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Выявление (единственного) нормального вида конгруэнтных симметричных матриц существенно зависит от схемы квадратичных форм основного кольца. Над локальным кольцом $R=2R$ с главным максимальным идеалом J, $1+J\subseteq R^{*2}$ и схемой квадратичных форм порядка 2 нормальный вид относительно конгруэнтности квадратичных форм (соответственно, симметричных матриц) выявлен в [1], там же найдено число классов проективно конгруэнтных квадратичных форм при условии нильпотентности максимального идеала (см. также [2]), число классов проективно эквивалентных квадрик найдено в [3].

Для локального кольца $R=2R$ с главным максимальным идеалом J, $1+J\subseteq R^{*2}$ и схемой квадратичных форм порядка 4, изоморфной $L_{1,1}\times L_{1,0}$ или $L_{1,0}\times L_{1,0}$, нормальный вид, а также, при условии нильпотентности J, число класов проективно конгруэнтных и проективно эквивалентных квадрик выявлено в [3].

В настоящей работе решается задача перечисления классов конгруэнтных и проективно конгруэнтных симметричных матриц над локальным кольцом $R=2R$ с условием $|R^*:R^{*2}|=4$ и схемой квадратичных форм, изоморфной $L_1\times L_{1,1}$.

1. Основные понятия

Пусть $R=2R$ — ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей, R^* — мультипликативная группа кольца, R^{*2} — подгруппа квадратов. Проективное пространство RP_{n-1} над R определено в [2].

Квадратичные формы и соответствующие им симметричные матрицы A и B называем проективно конгруэнтными, если существуют $k\in R^*$ и $U\in GL(n,R)$ такие, что $kA=UBU^T$. В случае $k=1$ квадратичные формы (соответственно, симметричные матрицы) называем конгруэнтными. Квадрикой проективного пространства RP_{n-1} называем проективное многообразие его точек R^*v, определенное уравнением $vAv^T=0$ с ненулевой симметричной $(n\times n)$-матрицей A над R. Квадрики, переводимые друг в друга проективностью, называются проективно эквивалентными [3].

Решение задачи перечисления конгруэнтных и проективно конгруэнтных классов квадратичных форм основано на выявлении (единственного) нормального вида соответствующих им симметричных матриц и связано с теорией схем квадратичных форм.

Для $a = rR^{*2}$ и $b = sR^{*2}$ положим $D(a,b) = \{tR^{*2} | t \in (rR^{*2} + sR^{*2}) \bigcap R^*\}$. Группа $G = R^*/R^{*2}$ вместе с отображением $a \mapsto D(1,a)$ и элементом -1 называют схемой квадратичных форм R. При условии $|R^* : R^{*2}| = 2$ существует три схемы квадратичных форм, обозначаемые L_1, $L_{1,1}$ и $L_{1,0}$. Для схем квадратичных форм определены операции группового произведения и группового расширения [4]. Схемы квадратичных форм порядка 4 могут быть представлены как групповые произведения $L_1 \times L_{1,1}$, $L_{1,1} \times L_{1,0}$, $L_{1,0} \times L_{1,0}$ и как групповые расширения $L_1[t]$, $L_{1,1}[t]$, $L_{1,0}[t]$.

2. Основные результаты

Пусть $R = 2R$ — локальное кольцо с главным максимальным идеалом $J = \langle \varepsilon \rangle$, $1 + J \subseteq R^{*2}$, $|R^* : R^{*2}| = 4$. Пусть $R^*/R^{*2} = \{1, -1, p, -p\}$ и $D(1,1) = D(1,p) = \{1,p\}$, $D(1,-1) = D(1,-p) = \{1,-1,p,-p\}$. Тогда схема квадратичных форм локального кольца R изоморфна $L_1 \times L_{1,1}$.

Теорема 2.1. *Всякая ненулевая симметричная матрица над локальным кольцом $R = 2R$ с главным максимальным идеалом $J = \langle \varepsilon \rangle$, $1 + J \subseteq R^{*2}$, $|R^* : R^{*2}| = 4$, схема квадратичных форм которого изоморфна $L_1 \times L_{1,1}$, конгруэнтна в точности одной матрице вида $diag(A_1\varepsilon^{i_1}, \ldots, A_q\varepsilon^{i_q}, O)$, $0 \leqslant i_1 < \cdots < i_q$, $\varepsilon^{i_q} \neq 0$, где для $j = 1, \ldots, q$ имеем $A_j = diag(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n_1}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{n_{-1}}, \beta)$, причем для любой матрицы A_j выполняется условие: либо $\beta \in \{1, p\}$ и $n_{-1} = 0$, либо $\beta \in \{-1, -p\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае, когда $R = 2R$ есть локальное кольцо с главным максимальным идеалом $J = \langle \varepsilon \rangle$, $1 + J \subseteq R^{*2}$, всякая ненулевая симметричная матрица над R конгруэнтна диагональной матрице

$$diag(k_1\varepsilon^{t_1}, \ldots, k_r\varepsilon^{t_r}, 0, \ldots, 0)$$

с однозначно определенными показателями $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_r$, $\varepsilon^{t_r} \neq 0$ и $k_i \in R^*/R^{*2}$ [1]. Таким образом, всякая невырожденная симметричная $(n \times n)$-матрица конгруэнтна по модулю J матрице вида $diag\left(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n_1}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{n_{-1}}, \underbrace{p, \ldots, p}_{n_p}, \underbrace{-p, \ldots, -p}_{n_{-p}}\right)$, $n_1 + n_{-1} + n_p + n_{-p} = n$. Покажем, что эта матрица конгруэнтна матрице вида

$$A = diag\left(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n_1}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{n_{-1}}, \beta\right), \tag{2.1}$$

для которой либо $\beta \in \{1, p\}$ и $n_{-1} = 0$, либо $\beta \in \{-1, -p\}$.

Согласно [1] матрицы $diag\,(a, ab)$ и $diag\,(ka, kab)$ конгруэнтны тогда и только тогда, когда $k \in D\,(1, b)$. Из условия $D\,(1,1) = \{1, p\}$, полагая $k = p$, $a = \pm 1$, $b = 1$, получаем конгруэнтность матриц $diag\,(1,1)$ и $diag\,(p,p)$, а также матриц $diag\,(-1,-1)$

и $diag\,(-p,-p)$. При $k = p$, $a = 1$, $b = -1$ из условия $D(1,-1) = \{1,-1,p,-p\}$ получаем конгруэнтность $diag\,(1,-p)$ и $diag\,(-1,p)$.

Используя конгруэнтности $diag\,(1,1)$ и $diag\,(p,p)$, $diag\,(-1,-1)$ и $diag\,(-p,-p)$, $diag\,(1,-p)$ и $diag\,(-1,p)$ получаем матрицу, на главной диагонали которой не более одного элемента, принадлежащего множеству $\{p,-p\}$. В случае, если получена матрица вида $diag\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{n_1},\underbrace{-1,\ldots,-1}_{n_{-1}},p\right)$ и $n_{-1} > 0$, конгруэнтность $diag\,(-1,p)$ и $diag\,(1,-p)$ завершает приведение матрицы к виду (2.1).

Покажем попарную не конгруэнтность $(n \times n)$-матриц вида (2.1). При $n = 1$ утверждение очевидно. В случае $n = 2$ получаем шесть матриц, три из которых $diag\,(1,1)$, $diag\,(1,-1)$ и $diag\,(-1,-1)$ имеют определитель ± 1, и три $diag\,(1,p)$, $diag\,(1,-p)$ и $diag\,(-1,-p)$ имеют определитель $\pm p$. Матрицы $diag\,(1,1)$, $diag\,(1,-1)$ и $diag\,(-1,-1)$ попарно не конгруэнтны в силу условия $D\,(1,1) = \{1,p\}$, попарная не конгруэнтность матриц $diag\,(1,p)$, $diag\,(1,-p)$ и $diag\,(-1,-p)$ вытекает из условия $D\,(1,p) = \{1,p\}$.

Предположим, что для всех $n < r$ любые две различные $(n \times n)$-матрицы вида (2.1) не конгруэнтны. Рассмотрим матрицы ранга r. Заметим, что определители конгруэнтных матриц совпадают по модулю R^{*2}. Поэтому матрица вида (2.1) с элементом $\beta \in \{1,-1\}$ не конгруэнтна матрице при условии $\beta \in \{p,-p\}$. Пусть $A_1 = diag\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{n_1^1},\underbrace{-1,\ldots,-1}_{n_{-1}^1}\right)$, $A_2 = diag\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{n_1^2},\underbrace{-1,\ldots,-1}_{n_{-1}^2}\right)$ и $n_1^1 \neq n_1^2$. Докажем, что A_1 и A_2 не конгруэнтны. Обозначим $n_1 = \min\{n_1^1; n_1^2\}$, $n_{-1} = \min\left\{n_{-1}^1; n_{-1}^2\right\}$. Если $n_1 + n_{-1} > 0$, то для матрицы $A = diag\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{n_1},\underbrace{-1,\ldots,-1}_{n_{-1}}\right)$ получаем $A_i = A \oplus D_i$, $i = 1,2$, причем $D_i = diag\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{n_1^i-n_1},\underbrace{-1,\ldots,-1}_{n_{-1}^i-n_{-1}}\right)$, ранг D_i меньше r и $D_1 \neq D_2$. Из конгруэнтности матриц A_1 и A_2 вытекает конгруэнтность матриц D_1 и D_2, что противоречит нашему предположению. Если $n_1 + n_{-1} = 0$, то получаем матрицы E и $-E$, не конгруэнтность которых следует из условия $D\,(1,1) = \{1,p\}$.

Аналогично, для матриц с определителем $\pm p$ достаточно показать не конгруэнтность матриц $diag(1,...,1,p)$ и $diag(-1,...,-1,-p)$. Предположение конгруэнтности этих матриц противоречит условию $D\,(1,1) = D\,(1,p) = \{1,p\}$. $\square$

Пусть $\Omega_q\,(m)$ — совокупность упорядоченных наборов $(m_1,\ldots,m_q)$ целых чисел $m_j > 0$ с суммой $m_1 + \cdots + m_q = m$.

Теорема 2.2. *Число K классов конгруэнтных ненулевых симметричных $(n\times n)$-матриц над локальным кольцом $R{=}2R$ с главным максимальным идеалом $J{=}\langle\varepsilon\rangle$ ступени нильпотентности s, схема квадратичных форм которого изоморфна $L_1\times L_{1,1}$,* *равно* $\sum\limits_{m=1}^{n}\sum\limits_{q=1}^{\min\{m,s\}}\begin{pmatrix} s \\ q \end{pmatrix}\sum\limits_{(m_1,\ldots,m_q)\in\Omega_q(m)}\prod\limits_{j=1}^{q} 2\,(m_j+1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Их условия нильпотентности максимального идеала J получаем $1+J\subseteq R^{*2}$. Рассмотрим матрицу вида $diag(A_1\varepsilon^{i_1},\ldots,A_q\varepsilon^{i_q},O)$, $0\leqslant i_1<\cdots<i_q$, $\varepsilon^{i_q}\neq 0$, где $A_j=diag(\underbrace{1,\ldots,1}_{n_1},\underbrace{-1,\ldots,-1}_{n_{-1}},\beta)$ для $j=1,\ldots,q$, причем для любой матрицы A_j выполняется условие: либо $\beta\in\{1,p\}$ и $n_{-1}=0$, либо $\beta\in\{-1,-p\}$. Обозначим число ненулевых элементов главной диагонали матрицы A через m, ранги невырожденных матриц $A_1,\ldots,A_q$ обозначим $m_1,\ldots,m_q$ соответственно. Получаем $m_1+\cdots+m_q=m$ и $m_j>0$ для всех $j=1,\ldots,q$. Пусть $k(m_j)$ — число попарно не конгруэнтных матриц ранга m_j вида (2.1). Тогда число K классов ненулевых симметричных $(n\times n)$-матриц над кольцом R равно $\sum\limits_{m=1}^{n}\sum\limits_{q=1}^{\min\{m,s\}}\begin{pmatrix} s \\ q \end{pmatrix}\sum\limits_{(m_1,\ldots,m_q)\in\Omega_q(m)}\prod\limits_{j=1}^{q} k\,(m_j)$.

Осталось показать, что $k\,(m_j)=2\,(m_j+1)$. В случае $n_{-1}=0$ получаем две матрицы $diag(\underbrace{1,\ldots,1}_{m_j})$ и $diag(\underbrace{1,\ldots,1}_{m_j},p)$. Если $\beta=-1$, то получаем m_j попарно не конгруэнтных матриц вида $diag(\underbrace{1,\ldots,1}_{n_1},\underbrace{-1,\ldots,-1}_{n_{-1}})$, где (n_1,n_{-1}) принимают значения из множества $\{(m_j-1;1)\,,(m_j-2;2)\,,\ldots,(0;m_j)\}$. Аналогично, при $\beta=-p$ получаем m_j попарно не конгруэнтных матриц вида $diag(\underbrace{1,\ldots,1}_{n_1},\underbrace{-1,\ldots,-1}_{n_{-1}},-p)$, где $(n_1,n_{-1})\in\{(m_j-1;0)\,,(m_j-2;1)\,,\ldots,(0;m_j-1)\}$. Резюмируя, получаем $k\,(m_j)=2+2m_j$. $\square$

Пусть

$$K_1=\sum_{q=1}^{s}2^q\begin{pmatrix} s \\ q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} [n/2] \\ q \end{pmatrix},\qquad \tilde{K}_2=\sum_{m=1}^{[n/2]}\sum_{q=1}^{\min\{m,s\}}\begin{pmatrix} s \\ q \end{pmatrix}\sum_{(m_1,\ldots,m_q)\in\Omega_q(m)}\prod_{j=1}^{q}2\,(2m_j+1)$$

и K — число конгруэнтных классов, найденное в теореме 2.2.

Теорема 2.3. *Число N классов проективно конгруэнтных ненулевых симметричных $(n\times n)$-матриц над локальным кольцом $R=2R$ с главным максимальным идеалом $J=\langle\varepsilon\rangle$ ступени нильпотентности s, схема квадратичных форм которого изоморфна $L_1\times L_{1,1}$, равно* $\frac{1}{4}\left(K+K_1+2\tilde{K}_2\right)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим классы конгруэнтных симметричных матриц с точностью до проективной конгруэнтности. Заметим, что матрица

$$diag(A_1\varepsilon^{i_1},\ldots,A_q\varepsilon^{i_q},O),\quad 0\leqslant i_1<\cdots<i_q,\quad \varepsilon^{i_q}\neq 0,$$

где $A_j=diag(\underbrace{1,\ldots,1}_{n_1},\underbrace{-1,\ldots,-1}_{n_{-1}},\beta)$, $j=1,\ldots,q$, причем для любой матрицы A_j либо $\beta\in\{1,p\}$ и $n_{-1}=0$, либо $\beta\in\{-1,-p\}$, конгруэнтна матрице kA $(k\in R^*)$ тогда и только тогда, когда для всех $j=1,\ldots,q$ конгруэнтны A_j и kA_j .

Необходимым и достаточным условием конгруэнтности матриц A_j и pA_j является четность ранга $r(A_j)$. Матрица A_j конгруэнтна матрице $-A_j$ тогда и только тогда, когда $\beta \in \{-1, -p\}$ и $2n_1 = r(A_j)$. Заметим, что при выполнении этих условий матрица A_j конгруэнтна также матрицам pA_j и $-pA_j$.

Класс конргуэнтных матриц с представителем $diag(A_1\varepsilon^{i_1}, \ldots, A_q\varepsilon^{i_q}, O)$ является также классом проективно конгруэнтных матриц, только если для всех $j = 1, \ldots, q$ клетки A_j удовлетворяют условиям $\beta \in \{-1, -p\}$ и $2n_1 = r(A_j)$. Каждый такой класс характеризуется кортежем показателей $(i_1, \ldots, i_q)$, набором четных значений $r(A_j)$ и для каждого j одним из двух возможных значений β. Следовательно, число K_1 классов конгруэнтных матриц, инвариантных относительно проективной конгруэнтности для всех множителей из R^*/R^{*2}, равно $K_1 = \sum\limits_{q=1}^{s} 2^q \begin{pmatrix} s \\ q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [n/2] \\ q \end{pmatrix}$.

В случае, когда все клетки A_j матрицы A соответственно конгруэнтны pA_j, но не конгруэнтны $-A_j$ и $-pA_j$, класс проективно конгруэнтных матриц с представителем A представляет собой два класса конгруэнтных симметричных матриц. Обозначим число таких конгруэнтных классов K_2. Найдем вначале число $\tilde{K}_2$ классов конгруэнтных матриц с представителем $diag(A_1\varepsilon^{i_1}, \ldots, A_q\varepsilon^{i_q}, O)$, все клетки A_j которого имеют четные ранги. Рассуждениями, аналогичными доказательству теоремы 2.2, получаем $\tilde{K}_2 = \sum\limits_{m=1}^{[n/2]} \sum\limits_{q=1}^{\min\{m,s\}} \begin{pmatrix} s \\ q \end{pmatrix} \sum\limits_{(m_1,\ldots,m_q)\in\Omega_q(m)} \prod\limits_{j=1}^{q} 2\,(2m_j+1)$. Откуда искомое число классов $K_2 = \tilde{K}_2 - K_1$.

Пусть N — число всех классов проективно конгруэнтных матриц, K_4 — число конгруэнтных классов с матрицей A, не конгруэнтной ни одной из матриц $-A$, pA и $-pA$. Тогда $N = K_1 + K_2 + K_4$, причем $K_1 + 2K_2 + 4K_4 = K$. Получаем

$$N = \frac{1}{4}\,(4K_1 + 4K_2 + 4K_4) = \frac{1}{4}\,(K + 3K_1 + 2K_2) = \frac{1}{4}\left(K + K_1 + 2\tilde{K}_2\right).$$

$\square$

Список литературы

[1] В. М. Левчук, О. А. Старикова, “Квадратичные формы проективных пространств над кольцами”, *Матем. сборник*, **6** (2006), 97–110.

[2] О. А. Старикова, А. В. Свистунова, “Перечисление квадрик проективных пространств над локальными кольцами”, *Изв. вузов. Матем.*, **12** (2011), 59–63.

[3] О. А. Старикова, “Классы проективно эквивалентных квадрик над локальными кольцами”, *Дискрет. матем.*, **25**:2 (2013), 91–103.

[4] M. Marshall, “The elementary type conjecture in quadratic form theory”, *Contemp. Math.*, **344** (2004), 275–293.

References

[1] V. M. Levchuk, O. A. Starikova, "Quadratic forms of projective spaces over rings", *Sb. Math.*, **197**:6 (2006), 887–899.

[2] O. A. Starikova, A. V. Svistunova, "Enumeration of quadrics of projective spaces over local rings", *Russ. Math.*, **55**:12 (2011), 48–51.

[3] O. A. Starikova, "Classes of projectively equivalent quadrics over local rings", *Discrete Math. Appl.*, **23**:3-4 (2013), 385–398.

[4] M. Marshall, "The elementary type conjecture in quadratic form theory", *Contemp. Math.*, **344** (2004), 275–293 (In Russian).

Информация об авторе

Старикова Ольга Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Северо-Восточный государственный университет, г. Магадан, Российская Федерация. E-mail: star-olga@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0507-5493

Поступила в редакцию 26.02.2019 г.
Поступила после рецензирования 25.04.2019 г.
Принята к публикации 20.05.2019 г.

Information about the author

Olga A. Starikova, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higer Mathematics Department. North-Eastern State University, Magadan, the Russian Federation. E-mail: star-olga@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0507-5493

Received 26 February 2019
Reviewed 25 April 2019
Accepted for press 20 May 2019